Les identités remarquables

Fiche de révision CRPE · 8 min de lecture · Programme de mathématiques du cycle 4 (BO n° 10 du 5 mars 2026), « Nombres et calculs », « Calcul littéral et algébrique », troisième : manipuler les trois identités remarquables pour développer et factoriser

Les trois identités du programme de troisième, démontrées avec la double distributivité, appliquées pour développer, factoriser et calculer mentalement.

Ce que le jury attend

La partie mathématiques de la première épreuve écrite comprend « plusieurs exercices ou problèmes » : l'épreuve permet d'apprécier la connaissance des notions du programme et l'aptitude à les mobiliser, et sollicite les capacités de raisonnement et d'expression écrite du candidat (arrêté du 17 avril 2025, art. 18, A, 1°). Le programme de troisième demande de manipuler les trois identités remarquables pour développer et factoriser : la fiche couvre cet attendu et démontre les trois identités par la double distributivité.

Ce que dit le programme

En troisième, le programme demande d'utiliser la double distributivité pour développer et factoriser des expressions dont le facteur est apparent, puis de manipuler les trois identités remarquables pour développer et factoriser. Il les écrit $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ et $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ (programme du cycle 4, troisième, « Calcul littéral et algébrique », objectifs d'apprentissage). La distributivité simple, étudiée dès la cinquième, est traitée dans la fiche développer et factoriser.

Les trois identités

DÉFINITION

Identités remarquables. Pour tous nombres a et b :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (carré d'une somme) ;
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (carré d'une différence) ;
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ (produit d'une somme par la différence des mêmes nombres).

Le terme 2ab s'appelle le **double produit** : c'est deux fois le produit des deux nombres a et b. Le programme demande aux professeurs de préciser si une propriété est admise ou démontrée (« La place du raisonnement ») : ces trois identités se démontrent avec la double distributivité, comme on le voit ci-dessous.

Pourquoi elles sont vraies

MÉTHODE

Carré d'une somme. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Carré d'une différence. $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Produit somme-différence. $(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$, car $ab - ba = 0$.

Une lecture géométrique de la première identité, quand a et b sont positifs : un carré de côté a + b se découpe en un carré de côté a (aire a^2), un carré de côté b (aire b^2) et deux rectangles a sur b (aire ab chacun), ce qui donne l'aire totale $a^2 + 2ab + b^2$.

Vérification numérique : pour a = 5 et b = 2, $(5 + 2)^2 = 49$ et $25 + 20 + 4 = 49$; $(5 - 2)^2 = 9$ et $25 - 20 + 4 = 9$; $(5 - 2)(5 + 2) = 21$ et $25 - 4 = 21$. Un exemple numérique ne prouve pas une identité, mais il permet de détecter une erreur.

Développer

Développer, c'est passer d'un produit à une somme. On repère a et b dans l'expression, on calcule a^2, b^2 et le double produit 2ab, puis on assemble.

EXEMPLE

- $(x + 3)^2$: a = x, b = 3. On obtient $x^2 + 2 \times x \times 3 + 9 = \mathbf{x^2 + 6x + 9}$.
- $(2x - 5)^2$: a = 2x, b = 5. $a^2 = 4x^2$, $2ab = 2 \times 2x \times 5 = 20x$, $b^2 = 25$. Donc $\mathbf{4x^2 - 20x + 25}$.
- $(x - 4)(x + 4)$: a = x, b = 4, donc $\mathbf{x^2 - 16}$.
- $(3x + 1)(3x - 1)$: a = 3x, b = 1, donc $\mathbf{9x^2 - 1}$.

ERREUR FRÉQUENTE

Erreur fréquente. Écrire $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, en oubliant le double produit. Avec a = 3 et b = 4, $(3 + 4)^2 = 49$ mais $3^2 + 4^2 = 25$. Autres erreurs : écrire $(a - b)^2 = a^2 - b^2$, ou $(x - 3)^2 = x^2 - 6x - 9$ (le dernier terme est toujours $+ b^2$, jamais négatif), ou encore $(2x)^2 = 2x^2$ au lieu de $4x^2$.

Factoriser

Factoriser, c'est passer d'une somme à un produit : on lit les identités de droite à gauche.

MÉTHODE

1. Chercher deux termes qui sont des carrés : a^2 et b^2.
2. Si les deux sont additionnés avec un troisième terme, vérifier que ce troisième terme est $+2ab$ ou $-2ab$; on obtient alors $(a + b)^2$ ou $(a - b)^2$.
3. Si l'expression est une différence de deux carrés $a^2 - b^2$, on obtient $(a - b)(a + b)$.
4. Vérifier en redéveloppant.

EXEMPLE

- $x^2 + 10x + 25$: $a = x$, $b = 5$, $2ab = 10x$. Donc $\mathbf{(x + 5)^2}$.
- $4x^2 - 12x + 9$: $a = 2x$, $b = 3$, $2ab = 12x$. Donc $\mathbf{(2x - 3)^2}$.
- $x^2 - 49$: $a = x$, $b = 7$. Donc $\mathbf{(x - 7)(x + 7)}$.
- $9x^2 - 16$: $a = 3x$, $b = 4$. Donc $\mathbf{(3x - 4)(3x + 4)}$.

Attention aux cas où l'identité ne s'applique pas. $x^2 + 6x + 10$ n'est pas un carré : $(x + 3)^2$ vaut $x^2 + 6x + 9$, pas 10. $x^2 + 9$ est une somme de deux carrés, sans double produit : aucune des trois identités ne la factorise.

Calcul mental et preuve

Les identités transforment un calcul difficile en calcul simple. Le programme ne cite pas cet usage ; c'est une application directe des identités.

EXEMPLE

- $51^2 = (50 + 1)^2 = 2\,500 + 100 + 1 = \mathbf{2\,601}$.
- $99^2 = (100 - 1)^2 = 10\,000 - 200 + 1 = \mathbf{9\,801}$.
- $47 \times 53 = (50 - 3)(50 + 3) = 2\,500 - 9 = \mathbf{2\,491}$.
- $1\,002^2 = (1\,000 + 2)^2 = 1\,000\,000 + 4\,000 + 4 = \mathbf{1\,004\,004}$.

Une preuve. Pour tout entier n, la différence entre les carrés de deux entiers consécutifs est un nombre impair. En effet, $(n + 1)^2 - n^2 = ((n + 1) - n)((n + 1) + n) = 1 \times (2n + 1) = 2n + 1$. Le programme demande de connaître l'expression générale d'un nombre impair, $2n + 1$ (troisième, « Calcul littéral et algébrique », automatismes). Contrôle : $8^2 - 7^2 = 64 - 49 = 15 = 2 \times 7 + 1$.

Erreurs fréquentes

- Oublier le double produit $2ab$, ou son signe.
- Mal élever au carré un produit : $(3x)^2 = 9x^2$, pas $3x^2$.

- Écrire un « $- b^2$ » à la place de « $+ b^2$ » dans $(a - b)^2$.
- Factoriser une somme de deux carrés avec la troisième identité.
- Ne pas vérifier en redéveloppant.

Pour aller plus loin

Les carrés sont étudiés dans la fiche les puissances ; la manipulation des lettres dans la fiche expressions littérales. Les exercices corrigés sont dans la page d'exercices.

> **À RETENIR**
>
> - $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
> - Le double produit 2ab ne s'oublie jamais, et b^2 est toujours précédé d'un +.
> - Pour factoriser : trouver a et b, vérifier le double produit, puis redévelopper.
> - Une somme de deux carrés $a^2 + b^2$ ne se factorise pas avec ces identités.
> - Un exemple numérique détecte une erreur mais ne prouve pas une identité.

Sources

1. Programme de mathématiques du cycle 4 (annexe 2 de l'arrêté du 18 février 2026, BO n° 10 du 5 mars 2026), « Nombres et calculs », « Calcul littéral et algébrique », troisième (automatismes : développer et factoriser une expression simple ; objectifs d'apprentissage : double distributivité, trois identités remarquables) ; La place du raisonnement (distinguer définition, propriété admise ou démontrée), consulté le 05/11/2026

Rédigée le 05/11/2026, vérifiée par un second relecteur le 05/11/2026.

travail-industrie.com · CRPE · document de révision indépendant, sans lien avec l'Éducation nationale ; il ne remplace pas les textes de référence.
Fiche en ligne : https://travail-industrie.com/concours/crpe/mathematiques/identites-remarquables · Quiz de la notion : https://travail-industrie.com/nos-formations-en-ligne/quizz/crpe-mathematiques-identites-remarquables
Généré le 09/11/2026.